CONCOURS NATIONAL - MAROC - 1989
EHTP-EMI-ENIM-ENPL-ENSEM-ENSIAS-IAV-INPT
Epreuve d'analyse

Dans ce problème , on étudie des suites réelles dont les termes u_n sont définis par une relation de récurrence du type : $u_{n+2} = (\alpha n + \beta)\, u_{n+1} + u_n$ où α et β sont des réels donnés .

Cette étude est faite en relation avec certaines solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre qui sont développables en séries entières . Les deux premières parties de ce problème sont indépendantes , la troisième utilise les résultats des deux premières .

PREMIERE PARTIE

Les réels a ,b , α , β étant donnés vérifiant $\alpha \neq 0$, on définit une suite $s = (u_n)$ au moyen des égalités $u_0 = a$, $u_1 = b$ et , pour tout entier naturel n , par la relation :

$$u_{n+2} = (\alpha n + \beta)\, u_{n+1} + u_n$$

On associe à la suite s , la série entière de terme général $\frac{u_n}{n!}\, x^n$. On note R_s le rayon de convergence de cette série entière .

1°) On pose $A = \text{Max}(|a|,|b|)$ et $K = \text{Max}(|\alpha|,|\beta|,1)$.

Montrer que pour tout entier n on a l'inégalité : $|u_n| \leq A\, K^n\, n!$.

Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence R_s ?

2°) On note f_s l'application de $]-R_s, R_s[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!}\, x^n$.

Montrer que f_s est solution de l'équation différentielle (E_s) : $(\alpha x - 1)y'' + \beta y' + y = 0$.

3°) On effectue le changement de variable $t = 1 - \alpha x$ et on pose pour tout x dans $]-R_s, R_s[$:

$$F_s(t) = f_s\left(\frac{1-t}{\alpha}\right) .$$

Montrer que F_s est une solution , dans un certain intervalle ouvert que l'on précisera , de l'équation différentielle (ε_s) : $ty'' + \frac{\beta}{\alpha} y' - \frac{1}{\alpha^2}\, y = 0$.

DEUXIEME PARTIE

Soit l'équation différentielle (ε) : $ty'' + \gamma y' - \delta y = 0$ où γ et δ sont des réels donnés , satisfaisant aux conditions $\delta > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, c'est à dire que γ n'est pas un entier négatif ou nul .

1°) a- Montrer que (ε) admet une solution unique notée $F(\gamma, \delta, t)$ qui est la somme d'une série entière de la variable t et qui vérifie l'égalité $F(\gamma, \delta, 0) = 1$.

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

b- On suppose dans cette question que $\gamma > 0$. Montrer que , lorsque t est dans l'intervalle $\mathbb{R}^+$, F vérifie les inégalités :

$$1 \leq F(\gamma, \delta, t) \leq e^{\delta t / \gamma}$$

$$0 \leq F(\gamma, \delta, t) - 1 \leq \frac{\delta t}{\gamma}\, e^{\delta t/\gamma}$$

c- Montrer que la dérivée d'ordre p de la fonction F vérifie la relation :

$$F^{(p)}(\gamma , \delta , t) = \frac{\gamma^p}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)...(\gamma+p-1)} F(\gamma+p , \delta , t) .$$

En déduire la limite lorsque p tend vers l'infini de la suite :

$$\frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)...(\gamma+p-1)}{\delta^p} F^{(p)}(\gamma , \delta , t) .$$

2°) On suppose que $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et on cherche la solution générale de (ε) dans l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ en utilisant le changement de fonction inconnue défini par : $Y(t) = t^{1-\gamma} Z(t)$.

a- Trouver l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction Z .
Montrer sans calcul , qu'il existe , pour cette équation , une solution qui est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est infini .

b- Montrer que la solution générale de (ε) dans $\mathbb{R}^{+*}$ est définie par :
$Y(t) = C_1F(\gamma , \delta , t) + C_2t^{1-\gamma}G(\gamma , \delta , t)$ où C_1 , C_2 désignent des constantes réelles et G une fonction que l'on exprimera en utilisant F .
(on étudiera au préalable la limite , lorsque t tend vers 0 par valeurs positives de la fonction

$$t \longrightarrow t^{1-\gamma} \frac{G(\gamma,\delta,t)}{F(\gamma,\delta,t)})$$

3°) On suppose de nouveau $\gamma > 0$ et on cherche la solution générale de (ε) dans $\mathbb{R}^{+*}$ au moyen du changement de fonction inconnue défini par : $Y(t) = Z(t)F(\gamma , \delta , t)$.
a- Former une équation différentielle à laquelle satisfait la fonction Z .
b- Montrer que la solution générale de (ε) est donnée dans $\mathbb{R}^{+*}$ par :
$Y(t) = C_1F(\gamma , \delta , t) + C_2H(\gamma , \delta , t)$ où C_1et C_2 sont deux constantes arbitraires et H la fonction définie pour tout t dans $\mathbb{R}^{+*}$ par $H(\gamma , \delta , t) = F(\gamma , \delta , t)\int_1^t \frac{du}{u^\gamma F^2(\gamma,\delta,u)}$.

4°) a- Etudier , suivant les valeurs de γ , la limite de $H(\gamma , \delta , t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives . Déterminer , lorsque $\gamma \geq 1$, toutes les solutions de (ε) dans l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ qui ont une limite finie lorsque t tend vers 0 par valeurs positives .

b- Montrer que si $\gamma > 1$, γ non entier , il existe une constante non nulle C telle que , lorsque t tend vers 0 par valeurs positives , $H(\gamma , \delta , t)$ soit équivalent à $Ct^{1-\gamma}$.

c- On suppose $\gamma = 1$. Montrer que la fonction J définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :
$J(t) = H(1 , \delta , t) - F(1, \delta , t)Log(t)$.
Vérifie les inégalités : $0 \leq J (t) \leq 2e^{3\delta}$, $\forall t \in]0,1]$. En déduire un équivalent de $H(1 , \delta , t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives .

TROISIEME PARTIE

On étudie la suite $s = (u_n)$ définie dans la première partie . Outre les notations de cette première partie , on pose :

$\gamma = \beta / \alpha$, $\delta = 1/ \alpha^2$, $F_\gamma = F(\gamma , \delta , 1)$, $F'_\gamma = F'(\gamma , \delta , 1)$, $F_\gamma^{(n)} = F^{(n)}(\gamma , \delta , 1)$,

$H_\gamma^{(n)} = H^{(n)}(\gamma , \delta , 1)$.

On suppose $\gamma > 0$.

1°) Montrer que , pour tout $x \in \left]\frac{-1}{k}, \frac{1}{k}\right[$: $f_s(x) = A_1F(\gamma, \delta, 1-\alpha x) + A_2H(\gamma, \delta, 1-\alpha x)$

où A_1 et A_2 sont des réels que l'on précisera en fonction de a , b , α , F_γ , F'_γ .
Exprimer le terme général u_n en fonction de a , b , α ,F_γ , F'_γ ,$F^{(n)}_\gamma$ et $H^{(n)}_\gamma$.

2°) On suppose $\gamma > 1$ et $R_s > \frac{1}{|\alpha|}$.

a- Montrer que $bF_\gamma + \alpha aF_\gamma' = 0$.
b- Donner un équivalent de (u_n) lorsque n tend vers l'infini .
c- montrer que R_s est infini .

3°) On suppose $\alpha = 1$, $\beta = 1$, a = 0 et b = 1 .

a- Montrer que : $u_n \geq (n - 1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire la limite lorsque n tend vers l'infini de $(-1)^n H^{(n)} (1 , 1 ,1)$

b- On considère la suite (v_n) définie par :
$v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $(n-1)! v_n = u_n$.
Montrer que $v_n \leq \sqrt{n}$. En déduire que la suite (v_n) est convergente . Quel est le rayon de convergente R_s de la série entière associée à la suite $s = (u_n)$?